

El astrólogo y el Emperador del Ganges¹

Nota preliminar

El explorador y aventurero Sir Richard Francis Burton, traductor, entre otras obras, de *Las mil y una noches*, buscó ansiosamente durante años las Actas de las audiencias del Emperador del Ganges, pero apenas logró recopilar algunos de los episodios que allí supuestamente se narraban.

Recientemente, un comunicante nos ha hecho llegar unos legajos, descubiertos en la Biblioteca Nacional y atribuidos a Ben Barrī, judío zamorano que trabajó en la Escuela de Traductores de Toledo en el siglo XII, que contienen la transcripción al castellano de la versión árabe de estas legendarias Actas. Nuestro comunicante, cuyo nombre no nos permite desvelar, es persona culta e instruida, e intuyó el valor matemático de estos documentos. Así que nos animó a hacerlos públicos, acompañándolos de los comentarios pertinentes.

Una de las Actas más interesantes es la que recoge una discusión del Emperador con su astrólogo Sadaranujan. La versión de Ben Barrī está escrita en un verso de retórica alambicada y pleno de retruécanos. Para comodidad del lector nos hemos tomado la libertad de transcribirla en prosa y en español moderno, respetando, en todo, los detalles de la discusión. Hemos añadido, asimismo, una serie de notas que ilustran algunos de sus aspectos; algunas de ellas nos han sido remitidas por nuestro comunicante.

Nota del comunicante: Las audiencias del Emperador del Ganges eran registradas en Actas, con todo lujo de detalles, por los escribas del Notario Mayor, quien, a su vez, incorporaba jugosos comentarios sobre las reacciones del Emperador.

En aquel tiempo, tras su invención un siglo antes, el juego del ajedrez era ya la gran afición del Emperador y de toda la Corte. Los nobles competían por tener a su servicio a los mejores equipos de ajedrecistas y sobre todo a los grandes maestros². Los premios a los ganadores de los torneos eran

¹**Adaptación y notas:** Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez. Departamento de Matemáticas, Universidad Autónoma de Madrid.

²*Nota del comunicante:* Conviene recordar que en el Imperio del Ganges los torneos se disputaban con el mismo sistema de competición que la lucha canaria, en la que se van

generosos. El Emperador no era mal jugador, pero Sadaranujan, aunque nunca jugaba, siempre asistía a las partidas con un aire de superioridad que enojaba al Emperador. Un día, parece ser que hartado de la actitud prepotente de Sadaranujan ante el ajedrez, lo hizo llamar a su presencia.

El Acta de la audiencia, tras un largo preámbulo que no viene al caso, dice así:



El Emperador exige a Sadaranujan que explique su actitud ante el ajedrez. Sadaranujan contesta, con cierta displicencia:

– Mi Señor, no sé jugar al Ajedrez. Tan sólo conozco las reglas básicas. Pero es un juego que carece de interés, pues no encierra ningún misterio para mí.

Esta respuesta incomoda especialmente al Emperador:

– ¿Cómo? Si así fuera, podrías hacerte inmensamente rico participando en los torneos de la Corte.

– Mi Señor, habéis de saber que mi alma no goza con la posesión de riquezas materiales. Por puro pensamiento, sin rebajarme a practicar el juego, he logrado averiguar su esencia. Y ese logro del espíritu humano³ me basta como satisfacción.

– No entiendo. Me exasperas: ¿de qué esencia me hablas?

– Mi Señor, sé que existe el Gran Libro Blanco del Ajedrez o el Gran Libro Negro del Ajedrez⁴. No he logrado averiguar cuál de los dos existe o si existen los dos. Pero al menos uno de los dos existe.

enfrentando sucesivamente un luchador por cada equipo. El luchador que pierde queda eliminado. Una *luchada* concluye cuando todos los luchadores de un equipo han sido eliminados. Normalmente, la luchada se decide en la confrontación final entre los dos *puntales*, generalmente los luchadores de mayor peso y fortaleza.

³Aquí Sadaranujan se adelanta al célebre matemático alemán Jacobi en su famosa prescripción de que la razón de hacer Matemáticas era por el puro honor del espíritu humano. Loable actitud que, sin embargo, desmerece la asombrosa utilidad de las matemáticas (en palabras de Eugene Wigner, *the unreasonable effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*).

⁴Hoy utilizamos la palabra estrategia; el Libro Blanco sería una estrategia que permitiría al jugador blanco forzar una victoria o unas tablas. Es decir, un protocolo preciso y prescrito de cómo reaccionar ante cualesquiera movimientos del adversario.

Ante la seguridad de las respuestas de su astrólogo, la exasperación del Emperador da paso a la curiosidad, y también a la ambición de quizás convertirse en el mejor jugador del Imperio.

– ¿Qué quieres decir?, ¿qué contienen esos libros?; ¿dónde están?

– Mi Señor, esos libros contienen las claves para jugar y nunca perder al Ajedrez. No aseguran la victoria, pero sí el camino para evitar la derrota. Estos libros existen en el mundo, pero no en nuestro vil mundo material, sino en el sublime mundo de las ideas, ese mundo de los filósofos del Lejano Poniente del que os hablé hace algún tiempo.

El Emperador ama el saber, y la filosofía se encuentra entre sus muchas aficiones. Las ideas de Platón, tan lejanas de la cultura tradicional de nuestro pueblo, le entusiasman. Ya empieza a advertir que lo que le pueda contar Saradanujan no va a mejorar su juego, pero promete ser muy interesante. Llama al Secretario de Cámara para que cancele la audiencia imperial y da orden de que no se le moleste.

– Explícate. Soy todo oídos.

– Mi Señor, el Ajedrez es en realidad un juego muy sencillo. El azar no parece intervenir y toda la información que se requiere para cada jugada está a la vista en el tablero⁵. No es como los juegos de naipes. El único problema es que el número de partidas posibles es enorme, pero finito⁶. Pero con paciencia, dedicación y concentración un equipo de entrenados calculadores podría hacer una lista de todas ellas⁷. Así que, si me permitís, voy a explicar mi argumentación con un juego más simple: el Shydarayata⁸ con cuatro guijarros.

⁵*Nota del comunicante:* Aunque en algunos de los juegos precursores del ajedrez moderno se utilizaba un dado para decidir qué pieza se movía (y se jugaba entre cuatro jugadores). El astrólogo parece referirse a una versión entre dos jugadores y sin dado, más parecida al juego actual. Por otra parte, las reglas de estas versiones primeras diferían de las actuales. Todavía en tiempos de Alfonso X, como se recoge en sus *Juegos de axedrez, dados y tablas*, la dama sólo podía desplazarse una casilla, en cualquier dirección, o el alfil dos casillas (aunque podía saltar por encima otras piezas). Las reglas que hoy utilizamos se fijaron, esencialmente, a partir del siglo XV.

⁶Este comentario nos permite deducir que ya entonces el número de jugadas de una partida estaba limitado.

⁷Aquí se equivocaba Sadaranujan. Ni con toda la potencia computacional que ahora nos ofrecen todos los ordenadores de la tierra podríamos completar esa tarea en un tiempo inferior al de toda la historia del Universo. Pero este error no resta validez a su argumentación.

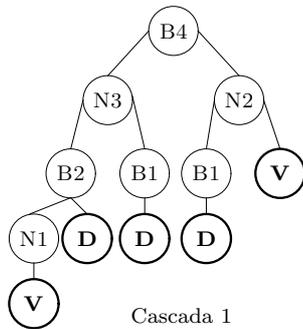
⁸*Nota del comunicante:* El Shydarayata era un juego del que gustaban los niños del

– No juegues con mi paciencia, Saradanujan. ¡Cómo vamos a comparar!, en ese juego es bien sabido que el negro gana siempre: si blanco quita uno, negra quita dos, y si blanco quita dos, negro quita uno.

– Mi Señor, de acuerdo. Hay muy pocas posibilidades, y por eso el análisis es tan directo. Pero permitidme que os plantee otra situación: si colocamos sesenta y cuatro guijarros, ¿cuál es la regla? ¿Quién tiene ventaja, el jugador blanco o el negro? No permitáis, mi Señor, que las vacas os impidan ver el rebaño.

El Emperador, concentrado como está en seguir la argumentación de su astrólogo, no capta el tono impertinente de este último comentario⁹.

– Bien. Es más difícil. Pero creo que podría hacer un análisis parecido.



– Exactamente, mi Señor. Pero igual ocurriría con el Ajedrez. Si nos centramos en la esencia y no en los detalles, os podré explicar cómo. Todo se basa en representar el juego convenientemente y en empezar por el final. El juego entero se puede representar como una cascada¹⁰. Las posiciones finales del juego las hemos llamado **V** (victoria) o **D** (derrota) siguiendo el punto de vista de blanco, el primer jugador. Las posiciones del juego están todas representadas de esta manera. Por ejemplo, N2 significa

que toca jugar a negro y que quedan dos guijarros.

El Emperador comienza a entusiasmarse, al comprender que hay un argumento general tras el análisis de aquel juego tan sencillo. Y aventura:

– Esta misma representación la podemos hacer si hubiera sesenta y cuatro guijarros.

Y, tras reflexionar un poco,

Imperio. Consistía en disponer unos guijarros sobre una mesa y dos jugadores, blanco el que empezaba, y negro el otro, se turnaban en retirar uno o dos guijarros. El que quitaba el último perdía. Había muchas variaciones, varios montones, otras reglas para la retirada de guijarros. . . Hoy en día se conoce a este juego como el del Nim.

⁹*Nota del comunicante:* Afortunadamente para el astrólogo, pues los arrebatos de ira del Emperador y sus consecuencias eran bien conocidos y temidos en todo el Imperio.

¹⁰El manuscrito de Ben Barrī no incluye ilustraciones de estas cascadas, así que nos hemos permitido dibujarlas a la manera en que hoy se representan, como árboles.

– Y también con el Ajedrez, sólo que ahora no emanarían dos torrentes de cada fuente¹¹, sino muchos: la cascada sería ahora mucho más larga y en cada fuente habría que escribir el tablero entero del Ajedrez en esa posición. . .

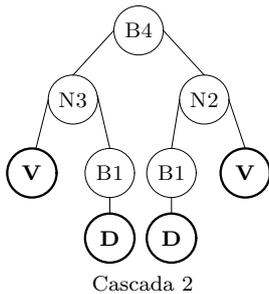
El silencio del astrólogo parece indicar que falta algo más. El Emperador lo mira inquisitivamente, pero el astrólogo, imperturbable, le sostiene la mirada. Por fin:

– ¡Ah!, ya sé. Además, las posiciones finales serán ahora tres: **V** y **D**, como antes, y además **T**, por tablas.

El astrólogo quiere más. . .

– Muy bien, te concedo que se podría representar el Ajedrez de esta manera. Habrá que ir pensando en entrenar a los calculistas de la Corte. Pero, ¿a qué nos lleva todo esto?

– Mi Señor, como os decía, el análisis procede ahora desde el fondo hasta la superficie. Fijaos en la fuente que está decorada con **B2** en esta primera cascada: ¿qué valor tiene para el blanco?



– **V**, sin duda, porque en esa tesitura el blanco juega a **N1** y gana, y claro, no se le ocurriría jugar a **D** (y perder).

– Muy bien, mi Señor, y ahora podemos ir recorriendo la cascada y. . .

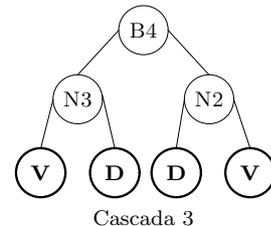
– Déjame. Ya está.

Dibuja entonces una segunda cascada, y luego dice, al tiempo que dibuja una tercera, en rápida y entusiasta sucesión:

– Y claro, en **N3** y **N2** jugaría el negro a la posición que ahora es **D**. Y ya podemos afirmar que el blanco pierde y el negro gana.

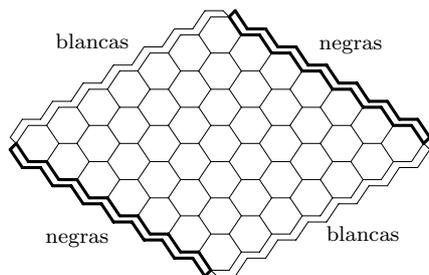
– Ahí lo tenéis, mi Señor: el Libro Negro del Shydarayata con cuatro guijarros.

El Emperador despidió al astrólogo Saradanujan con un adusto ademán, y queda absorto en sus pensamientos.



¹¹El lector habrá adivinado que las fuentes son los círculos y los torrentes las líneas que conectan una fuente de un nivel con una fuente del nivel inmediatamente inferior. En términos de hoy, los vértices y las aristas del árbol.

Aquí acaba el Acta que recoge la discusión del Emperador y el astrólogo en torno al ajedrez¹². En otra de las Actas transcritas por Ben Barri se describe una escena acaecida unos días después. Tras el preámbulo de rigor, que de nuevo evitaremos al lector, el Acta comienza así:



El Emperador convoca al astrólogo a su presencia. Durante varias lunas ha estado meditando sobre la discusión en torno al Ajedrez y las maneras de analizar los juegos de mesa. Ha logrado resolver el juego del Virisiddhta¹³, al que tan aficionados son los jóvenes príncipes. Sin embargo, el juego del Bransiddhta¹⁴, el favorito de la Emperatriz y las demás

¹²Muchos años después, Ernst Zermelo, matemático alemán del siglo XX, a quien debemos gran parte de la fundamentación actual de las Matemáticas, nos legaría un detallado análisis de juegos como el ajedrez o el Nim, que técnicamente se conocen como juegos con información completa y de competencia estricta. Zermelo renunció a su cátedra en Friburgo por oposición al nazismo. El húngaro John von Neumann y el austriaco Oskar Morgenstern fueron los primeros en formalizar lo que hoy conocemos como Teoría de Juegos, en su clásico *Theory of Games and Economic Behavior* (1944). Von Neumann también es bien conocido por sus aportaciones a la Lógica, la Mecánica Cuántica, la Teoría de los Procesos Estocásticos, la Inteligencia Artificial, etc. Todo un personaje. En palabras de otro húngaro ilustre, George Pólya,

“Johnny ha sido el único estudiante que me llegaba a atemorizar. Si en el transcurso de una lección yo proponía un problema abierto, lo más probable es que él me viniera, a la salida de la clase, con la solución completa garabateada en un trozo de papel.”

¹³*Nota del comunicante:* El “juego de los tres espíritus”, que hoy conocemos como las tres en raya.

¹⁴Según nuestro comunicante, el “juego de los ríos”. Hoy en día es conocido como el juego del Hex, y fue redescubierto por el poeta e ingeniero danés Piet Hein en 1942 y, posteriormente, por John Nash en 1948. Nash, tan de actualidad con motivo de la oscarizada película *Una mente maravillosa*, construyó el argumento que aquí anticipaba el astrólogo. Los trabajos de Nash en el campo de la Teoría de Juegos le valieron el Premio Nobel de Economía en 1994. El juego del Hex fue comercializado unos años después y popularizado por Martin Gardner en sus artículos divulgativos en los años 70. Dos jugadores van situando alternativamente fichas blancas y negras en el tablero; el que juega con blancas empieza, y gana aquél que consiga un *camino* de fichas de su color, consecutivas, que una las orillas de su color.

damas de la Corte, ha resistido a todos sus intentos. El Emperador se dirige a su astrólogo:

– Mi estimado Sadaranujan, llevo tiempo meditando sobre la conversación que mantuvimos acerca de los caminos para analizar los diversos juegos, e intentado aplicar tus sabias enseñanzas al Bransiddhta. Sospecho que este juego se presta a un análisis similar, pero no termino de completarlo. Te ruego me ayudes. Te confieso, y confío en tu discreción, que me subleva el hecho de que mi dulce Señora, la Emperatriz, me derrote siempre en nuestras partidas.

– Mi Señor, vuestra confianza en mí me halaga, siendo como soy poco merecedor de tal distinción, pues apenas soy un humilde siervo de. . .

– Por Vishnú, al que ruego nos proteja y dé felicidad, deja esas consabidas fórmulas y háblame sobre el juego.

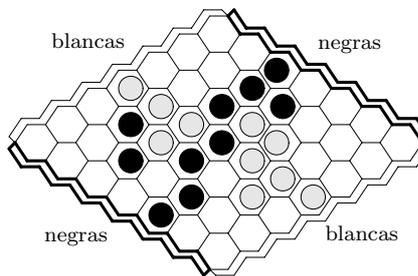
– Perdonadme, mi Señor, sabéis que vuestros deseos son órdenes para mí. El juego al que os referís no debería tener secretos para vos, que ya estáis versado en los resortes del pensamiento que permiten desentrañar la esencia de estos entretenimientos. Si me permitís una humilde observación, nuestra Emperatriz demuestra una gran astucia, pues supongo que siempre opta por ser la primera en jugar.

– Pues sí, tienes razón. ¿Es ésa la clave que le permite ganar siempre? Por utilizar tus términos, ¿es que acaso dispone del Libro Blanco del Bransiddhta?

– Mi Señor, lo único que puedo aseguraros es que tal libro existe, no así el Libro Negro.

– No tan rápido. Supongamos que construimos una cascada semejante al que me mostraste para el juego del Shydarayata; sin duda habrá de constar de multitud de fuentes y torrentes. . . pero una primera duda me asalta: ¿puede acaso el juego terminar en tablas?

– Mi Señor, tal posibilidad no existe, como bien podéis descubrir. Os ruego que penséis en los siguientes términos: el jugador blanco está construyendo un cauce para un río que una sus dos orillas, mientras que el jugador negro trata de levantar una presa de piedras que impida el



paso de las aguas. Sólo logrará bloquear las aguas si su construcción le permite ir, pasando de piedra a piedra, de una de sus orillas a la otra.

– Lo que dices suena razonable, y me convence¹⁵.

El Emperador medita durante unos instantes, y prosigue:

– Pero entonces, como la cascada es finita y sólo hay dos posibles finales, uno de los dos libros, quizás el Blanco o quizás el Negro deberá existir. ¿O acaso es posible que existan ambos? No, espera, procediendo hacia atrás, como tú me enseñaste, la primera fuente de la cascada sólo puede acabar con el símbolo del Blanco o del Negro, pero nunca con los dos a la vez. Ya veo: ¿y por qué aseguras que es el Libro Blanco el que existe, y no el otro?

– Mi Señor, os daré un argumento, que más parece un ardid, pero que comprobaréis que es sólido como el suelo que nos sostiene. Suponed que es el Libro Negro el que existe.

– ¡Por Brahma, nuestro creador, que me confundes! ¿No es la existencia del Libro Blanco la que perseguís comprobar?, ¿y queréis partir de la existencia del Libro Negro?

– Mi Señor, este ardid no es invención mía, sino que es un fértil camino de constatación, que ya utilizaban los maestros del Lejano Poniente¹⁶.

Esta invocación a sus adorados filósofos occidentales tranquiliza al Emperador, que concede:

– De acuerdo, el Libro Negro existe. ¿Y qué?

– El jugador blanco hace un primer movimiento, no importa cuál. Y, a todos los efectos, actúa como si esa casilla elegida estuviera vacía. Así el Blanco se ha convertido en Negro y viceversa. Por tanto, podrá leer el Libro Negro y seguir sus preceptos.

El Emperador empieza a desesperarse ante lo intrincado del argumento, pero no desea hacerlo notar. Así que medita sobre el asunto y responde:

¹⁵El razonamiento del astrólogo es intuitivamente obvio. Pero, como en muchas cuestiones topológicas, como por ejemplo el teorema de la curva de Jordan, que el lector podrá adivinar está muy relacionado con esta cuestión, una demostración rigurosa es complicada. En el artículo de David Gale “The Game of Hex and the Brouwer fixed-point theorem”, *Am. Math. Monthly* **86** (1979), páginas 818–827, se puede encontrar una demostración de carácter combinatorio de este hecho, así como su relación con el teorema del punto fijo de Brouwer.

¹⁶Un argumento de reducción al absurdo, como habrá adivinado el lector.

– Tengo una objeción: ¿qué ocurre si los mandamientos del Libro Negro exigen en algún momento elegir la casilla que Blanco tomó en primer lugar?

– Mi Señor demuestra gran perspicacia al plantearme esta dificultad. Si tal fuera el caso, Blanco volvería a escoger una casilla al azar, y de nuevo estaría en condiciones de leer el Libro Negro. Esto se haría tantas veces como fuera necesario. Siguiendo los mandatos del Libro Negro, como la casilla adicional sólo podría, en todo caso, ayudar a Blanco a completar su plan, es seguro que acabaría venciendo¹⁷.

– No sé si acabo de captar lo que dices. Pero, si fuera cierto, el Libro Negro permitiría al Blanco conseguir la victoria. . . ¡Así estaríamos escribiendo las líneas de un Libro Blanco! Y habíamos convenido en que ambos no pueden existir simultáneamente.

– Mi Señor, habéis captado la esencia del argumento que utilizan los maestros del Lejano Poniente: esta situación absurda nos muestra sin lugar a dudas que ese supuesto Libro Negro no puede existir.

El Emperador considera que por esta sesión es suficiente y despide al astrólogo.

Epílogo

Nos consta la autenticidad del documento de Ben Barrī, aunque nunca sabremos a ciencia cierta si las Actas que transcribió son reales o no, pues, como nos señala nuestro comunicante, era entonces costumbre que los eruditos, como sin duda era nuestro personaje, utilizaran parábolas y hechos figurados para transmitir sus enseñanzas.

Pero, tanto si son creación de Ben Barrī como si, efectivamente, son una transcripción de las Actas originales, el texto muestra un conocimiento preciso y profundo de lo que hoy conocemos como Teoría de Juegos¹⁸. ¿Cuántas veces más habrá sido así, cuántos redescubrimientos?

¿Serían Zermelo y Nash reencarnaciones del astrólogo Sadaranujan, o del mismísimo Ben Barrī?¹⁹

¹⁷El lector debería reflexionar sobre los argumentos del astrólogo, pues son sutiles. Conviene señalar que la simetría del tablero desempeña un papel fundamental en ellos.

¹⁸Para aquéllos que quieran profundizar en estas cuestiones, el libro de Ken Binmore *Fun and games: a text on Game Theory*, D. C. Heath, Lexington, Massachusetts, 1992, es una buena referencia.

¹⁹Si a estas alturas algún lector sigue preocupado por la identidad de nuestro misterioso comunicante, digamos que. . . digamos que es una reencarnación de Cide Hamete Benengeli.