"El desorden absoluto es imposible": la Teoría de Ramsey

por

Pablo Fernández Gallardo y José Luis Fernández Pérez

La teoría de Ramsey es una teoría matemática que pretende justificar el eslogan que da título a este artículo. Claro que nuestra experiencia diaria nos da muestras permanentes de cuán equivocado es el tal eslogan, fuera del contexto matemático.

Decir, a la verdad, que en favor nuestro
han querido los dioses disponernos
el orden bello de la naturaleza;
. . . . . .
estas fábulas y otras semejantes
indicio, ¡oh Memmio!, son de gran locura.

Tito Lucrecio, *De rerum natura.* Libro V.

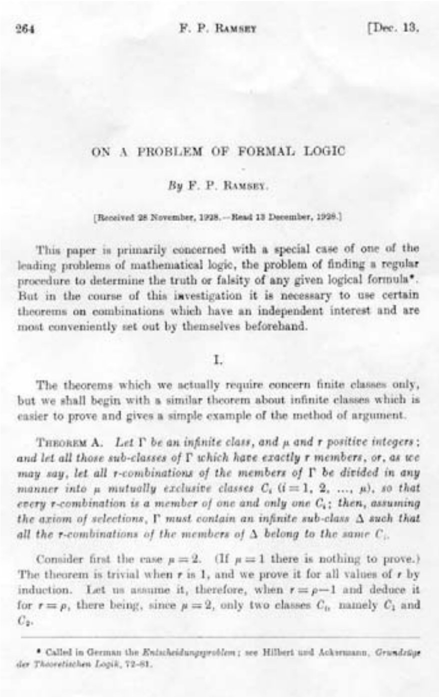
En pocas palabras, la teoría de Ramsey afirma que, en general, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura, con orden. El propósito de esta nota es ofrecer una introducción a esta elegante teoría, con la esperanza de que el lector se anime a indagar por su cuenta, ponderar su utilidad y, quizás, pensar en alguno de los numerosos problemas que suscita.

Ramsey, Erdős.

Figura 1: F.P. Ramsey.

Frank Plumpton Ramsey nació en Cambridge en 1903 y murió a los 26 años, a consecuencia de ciertas complicaciones tras una operación quirúrgica. Fue un hombre extraordinariamente brillante, miembro de una familia que aportó otros destacados nombres al mundo de la cultura y la política inglesas: su padre fue presidente del Magdalene College de Cambridge y su hermano, arzobispo de Canterbury. Ramsey se educó en Cambridge y trabajó desde 1924 hasta su muerte en el King's College. Producto típico del maravilloso ambiente intelectual del periodo de entreguerras en Oxford y Cambridge, destacó en muy diversos campos. Cada uno de sus artículos contiene brillantes y originales aportaciones en disciplinas diversas como la Lógica, las teorías de la Probabilidad y de la Decisión, la Filosofía, la Economía. . .

A los 19 años publicó *Mr. Keynes on Probability*, una revisión crítica del *A Treatise on Probability*, [Ke], tan demoledora que el propio Keynes tuvo que reconsiderar sus anteriores planteamientos. En el trabajo *Truth and Probability* desarrolló su propia teoría de la probabilidad, en la que estableció los principios de las modernas teorías de la probabilidad subjetiva, de la teoría de la Utilidad y de la teoría de la Decisión.



264 F. P. Ramsey [Dec. 13,

ON A PROBLEM OF FORMAL LOGIC

By F. P. Ramsey.

[Received 28 November, 1928.—Read 13 December, 1928.]

This paper is primarily concerned with a special case of one of the leading problems of mathematical logic, the problem of finding a regular procedure to determine the truth or falsity of any given logical formula*. But in the course of this investigation it is necessary to use certain theorems on combinations which have an independent interest and are most conveniently set out by themselves beforehand.

I.

The theorems which we actually require concern finite classes only, but we shall begin with a similar theorem about infinite classes which is easier to prove and gives a simple example of the method of argument.

Theorem A. *Let Γ be an infinite class, and μ and r positive integers; and let all those sub-classes of Γ which have exactly r members, or, as we may say, let all r-combinations of the members of Γ be divided in any manner into μ mutually exclusive classes C_i ($i = 1, 2, \ldots, \mu$), so that every r-combination is a member of one and only one C_i; then, assuming the axiom of selections, Γ must contain an infinite sub-class Δ such that all the r-combinations of the members of Δ belong to the same C_i.*

Consider first the case $\mu = 2$. (If $\mu = 1$ there is nothing to prove.) The theorem is trivial when r is 1, and we prove it for all values of r by induction. Let us assume it, therefore, when $r = \rho - 1$ and deduce it for $r = \rho$, there being, since $\mu = 2$, only two classes C_i, namely C_1 and C_2.

* Called in German the *Entscheidungsproblem*; see Hilbert und Ackermann, *Grundzüge der Theoretischen Logik*, 72-81.

Figura 2: Artículo original.

En la obra *The Foundations of Mathematics* reconstruyó la teoría de tipos ramificada de los *Principia Mathematica* [WR] de Russell y Whitehead, en lo que se llama la teoría de tipos *Ramsey*ficada. Mantuvo también una intensa y fructífera relación con Wittgenstein, del que tradujo el *Tractatus Logico-Philosophicus*, [Wi]. Por cierto, Ramsey consiguió que Wittgenstein lograra un puesto en Cambridge, para lo que se necesitó que el *Tractatus* fuera aceptado como tesis doctoral.

Su interés por los fundamentos de las Matemáticas le llevó a buscar una solución al *Entscheidungsproblem*[1]. En el trabajo *On a Problem of Formal Logic* resolvió un caso particular de éste, lo que, en Matemáticas, es conocido por el Teorema de Ramsey, que es la base de la teoría que lleva su nombre.

Keynes y Pigou le animaron a que abordara algunos problemas de Economía. En *A contribution to the Theory of Taxation* y *A Mathematical Theory of Savings* proporcionó elegantes y novedosas soluciones a un par de difíciles cuestiones. Y estableció las bases de teorías y técnicas que luego resultaron muy fructíferas: el uso del cálculo de variaciones en Economía, las teorías de tributación y ahorro óptimos...

Impresiona el magnífico y variado ramillete de logros intelectuales que Ramsey consiguió en su corta vida. Pero Ramsey no creó ni desarrolló la teoría que lleva su nombre, que fue iniciada por Erdős y Szekeres en 1933. Tiempo después descubrieron la conexión con los trabajos de Ramsey, que en este contexto habían pasado inadvertidos.

Pal Erdős (1913-1996) matemático errante, autor de más de 1500 artículos (el más prolífico de la historia, ¡un promedio de dos mensuales!), la mayoría en colaboración, ha sido el líder indiscutible de los estudios de Combinatoria de este siglo. Su ingente producción en colaboración ha dado lugar al curioso *número de Erdős*. El propio Erdős tiene número cero. Un matemático tiene número de Erdős 1 si ha colaborado directamente con Erdős. Si ha colaborado con un colaborador de Erdős pero no con Erdős directamente, tendrá número 2. Y así en general, de manera que si un matemático ha colaborado con otro cuyo número de Erdős $\leq n$, entonces el suyo será $\leq n+1$. Por cierto, colaborar significa

Figura 3: P. Erdős

[1] El problema de encontrar un método mecánico para decidir si una proposición matemática arbitraria puede ser probada dentro de una teoría o no.

haber escrito y publicado un artículo (de autoría conjunta) en una revista científica. Los números de Erdős son sorprendentemente bajos; los autores, por ejemplo, tienen números de Erdős 3 y 2, respectivamente. Incluso figuras destacadas de otros campos científicos tienen número de Erdős finito[2]: Einstein (2), Von Neumann (3), Witten (5), Dirac (4), Heisenberg (4)...

La personalidad de Erdős es también apasionante. No sólo como "maestro de la colaboración", sino como creador e impulsor de nuevas ramas de las Matemáticas. Sus aportaciones han resultado ser decisivas en campos como la Teoría de Números, la Combinatoria, la Teoría de Grafos, la Geometría combinatoria ... y tantos otros.

Como persona, quizá lo más interesante fue su desapego por las cuestiones materiales: dinero, posición, honores... Nunca se preocupó por tener una casa o un puesto, empleaba el dinero de los premios que recibía en ayudar a jóvenes con talento profesional o en sus famosas recompensas por solucionar problemas matemáticos. Quizá la siguiente anécdota sirva para ilustrar su personalidad: en una ocasión, un médico le recetó unos antibióticos para tratar una pleuresía aguda que aquejaba al ya anciano Erdős. Ante su aspecto, le dijo:

- *Adiós, señor, le he dejado la receta. No le hago pagar la consulta.*

Erdős se incorporó bruscamente de la cama y exclamó:

- *¡Puedo pagar! Soy un matemático de la Academia Húngara de Ciencias, he escrito muchas obras ...*

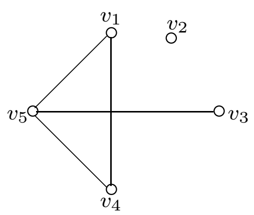
Una de las pocas ocasiones en que reivindicó un cierto *status* para él.

El lenguaje de los grafos y los colores

Pasemos ya a las matemáticas de Ramsey y de Erdős: a la teoría de Ramsey. El lenguaje más apropiado para describirla es el de los **grafos**: un grafo G está formado por un conjunto de vértices V y un conjunto A de aristas, donde A es un subconjunto de

$$\mathcal{P}_2(V) = \{\, \text{subconjuntos de } V \text{ con exactamente 2 elementos} \,\}.$$

Escribimos entonces $G = (V, A)$. Los grafos permiten describir relaciones binarias entre los elementos de un cierto conjunto: tenemos una colección de objetos (que serán los vértices) y una cierta propiedad binaria que cada par de objetos puede o no satisfacer. Si dos objetos v_1 y v_2 están relacionados mediante esa propiedad, $v_1 \mathcal{R} v_2$, entonces la arista (v_1, v_2) estará en el grafo. Sólo nos interesarán las relaciones que sean simétricas (el grafo correspondiente no estará dirigido) y tales que $v \not\mathcal{R} v$, para todo $v \in V$ (el grafo no tendrá lazos). Los grafos los representamos colocando los vértices como puntos del plano y las aristas, como segmentos que unen los vértices que las determinan. Un ejemplo sería:



[2]En la página `www.oakland.edu/~ grossman/erdoshp.html` el lector puede encontrar amplia información sobre números de Erdős.

que tiene como conjunto de vértices a $V = \{v_1, \ldots, v_5\}$ y como conjunto de aristas, a $A = \{\{v_1, v_5\}, \{v_5, v_4\}, \{v_1, v_4\}, \{v_5, v_3\}\}$.

Los grafos admiten también una notación matricial: si $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, entonces podemos describir el grafo que tiene a A como conjunto de aristas mediante una matriz cuadrada $n \times n$, $G = (g_{ij})$, donde

$$g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad (v_i, v_j) \in A, \\ 0, & \text{si} \quad (v_i, v_j) \notin A. \end{cases}$$

Así, G será una matriz simétrica formada por ceros y unos, con ceros en la diagonal. Consideremos algunos ejemplos de problemas que pueden describirse eficazmente en el lenguaje de los grafos:

Un horario de clases. Tenemos un cierto conjunto de asignaturas, y queremos confeccionar un horario para impartirlas de manera que no programemos dos asignaturas a la misma hora si hay algún alumno matriculado en ambas. Para traducirlo al lenguaje de los grafos, definiremos un conjunto de vértices $V = \{\text{ asignaturas }\}$, y la relación binaria consistirá en que $v\mathcal{R}v'$ si y sólo si hay algún alumno matriculado en ambas, y $v \neq v'$. La pregunta que podríamos plantearnos es: ¿cuál es el número mínimo de horas de clase necesario para impartir todas las asignaturas de manera que todos los alumnos puedan cursarlas?

Colorear un mapa. Para un mapa plano, consideraremos a los países (y a los lagos y mares) como nuestro conjunto de vértices y la relación será la de vecindad (es decir, habrá una arista entre dos vértices si los países que representan son vecinos en el mapa). Podemos entonces preguntarnos cuál es el número mínimo de colores necesario para colorear el mapa de manera que países vecinos reciban colores distintos.

En realidad estamos hablando del mismo problema: *colorear* los vértices de un grafo es asignar colores a los vértices de forma que dos vértices que sean extremos de una arista reciban colores distintos. Al número mínimo de colores necesario para colorear un grafo dado se le llama *número cromático* del grafo. En los dos ejemplos anteriores nos estamos preguntando por el número cromático de los grafos asociados.

En ambos ejemplos, además, sería interesante tener un algoritmo que nos permitiera obtener una de esas coloraciones óptimas (que use el menor número de colores posible)

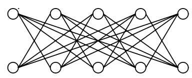
El algoritmo acaparador.

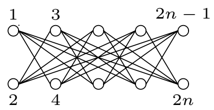
Consideremos un grafo $G = (V, A)$, con n vértices. Para colorearlo, nos damos una paleta ordenada de colores $S = \{a, b, \ldots\}$.

- Ordenamos los vértices del grafo, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
- Al primer vértice, v_1, le asignamos el color a.
- Para colorear v_2: si es vecino de v_1, le asignamos b; si no, a.

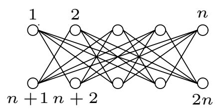
  $\vdots$
- Una vez coloreados los $k-1$ primeros vértices, de la lista de colores eliminamos aquellos usados en los vecinos de v_k que ya hayan sido coloreados. De los que quedan, asignamos a v_k el primer color disponible.

La efectividad del algoritmo depende decisivamente de la ordenación inicial. Por ejemplo, si consideramos el siguiente grafo de $2n$ vértices (que forma parte de una familia especial de grafos que van por la vida con el rotundo nombre de grafos bipartitos):





Esta ordenación de los vértices hace que el algoritmo acaparador utilice n colores.



Esta ordenación emplea sólo 2, su número cromático

Se puede demostrar que existen ordenaciones de los vértices para las que el algoritmo acaparador es óptimo. Si analizamos el algoritmo, vemos que el número de colores prohibidos para colorear el vértice k-ésimo es menor o igual que el $\min\{\#\text{vecinos de } v_k, \#\text{vértices anteriores}\}$. Así que una regla razonable de ordenación de los vértices es aquélla en la que los vértices de mayor grado (mayor número de vecinos) vayan al principio, cuando el número de anteriores es pequeño. Sin embargo, esta regla de ordenación, aunque buena, no es, en general, óptima (usa más colores de los necesarios).

Para el segundo ejemplo se tiene el siguiente famoso resultado:

Teorema (de los cuatro colores). *Todo grafo plano tiene número cromático* ≤ 4.

Por grafo plano entendemos aquél que se puede representar sin cortes en el plano: los vértices serán puntos del plano y las aristas serán arcos que conectan vértices y que no se cortan —salvo en los extremos, si acaso—. Este problema ha sido una de las cuestiones abiertas más importantes en la teoría de grafos. Aparentemente, la conjetura apareció por vez primera en 1852, en una carta de Augustus de Morgan a Sir Rowan Hamilton (al parecer, fue un hermano de un alumno de De Morgan, Francis Guthrie, quien planteó la pregunta). Durante los años siguientes se publicaron una serie de demostraciones que resultaron ser falsas. En 1890, Heawood probó que cinco colores eran suficientes y dio estimaciones para el número de colores necesarios para colorear mapas en otras superficies en función de su característica de Euler.

En 1975, Appel y Haken ([AH], [AHK]) obtuvieron una demostración que requería el uso del ordenador para la comprobación de un número grande de configuraciones extremales.

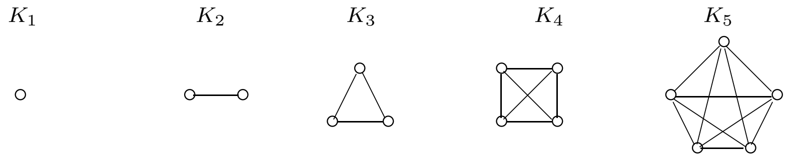
En 1994, Robertson, Sanders, Seymour y Thomas [RSST]) presentaron una prueba del teorema que simplificaba notablemente la de Appel y Haken; seguía requiriendo el uso del ordenador, aunque de forma mucho más limitada.

> *¿Qué es una demostración matemática?*
>
> El argumento de Appel y Haken nos hace preguntarnos por qué entendemos por demostración en matemáticas. En principio, una prueba matemática supone una deducción lógica de una conclusión a partir de unas hipótesis.
> ¿Cómo se comprueba que la cadena lógica es correcta?, ¿quién lo comprueba? En la práctica, el certificado de corrección lo adjudica el uso: los expertos en el contenido de un teorema comprueban la demostración al usarla.
> Podemos, en principio, comprobar el programa de ordenador que usa la prueba de Appel y Haken, es decir, verificar que el algoritmo en que se apoya hace lo que se supone debe hacer. Pero luego, cuando el ordenador ejecuta el programa, ¿cómo asegurar que realmente sigue escrupulosamente los pasos del algoritmo?

Para la teoría de Ramsey, lo que nos interesará será *colorear aristas* (sin restricciones sobre vecindad) en una familia especial de grafos, los *grafos completos* K_n, aunque se pueden estudiar generalizaciones. Por ejemplo, colorear con restricciones del tipo: si dos aristas tienen un vértice en común, deben recibir colores distintos; o bien colorear otro tipo de grafos. El grafo K_n tiene n vértices y todas las $\binom{n}{2}$ posibles aristas, es decir,

$$A(K_n) = \mathcal{P}_2(\{1, \dots, n\}).$$

Podemos dibujar el grafo K_n como el polígono de n vértices con todos sus lados y todas sus diagonales:



Por cierto, K_5 no es un grafo plano (no se puede representar sin cortes en el plano o la esfera), es decir, no hay mapas de cinco países con la relación de vecindad que describe K_5.

La Teoría de Ramsey.

El principio del palomar.

Empecemos recordando el conocido principio del palomar (también llamado de Dirichlet). Hay varias formas de enunciarlo, pero mantengamos el lenguaje zoológico:

> *Si tenemos n nidos y $n+1$ palomas, entonces hay un nido en el que duermen al menos dos palomas.*

Obvio, ¿no? Pues bien, un principio tan sencillo puede ayudarnos a la hora de resolver algunos problemas de apariencia complicada. Por supuesto, la dificultad suele estar en "identificar" los nidos y las palomas. Empecemos con un ejemplo sencillo:

> *si tiramos dos dados doce veces, al menos en dos de esas tiradas obtendremos la misma suma de puntuaciones.*

Aquí, las once posibles puntuaciones suma, $\{2, 3, \ldots, 12\}$, son los nidos; y las doce tiradas, las palomas. Veamos un ejemplo algo más complicado:

> *Sea $\mathcal{X}$ un conjunto arbitrario de 53 números naturales. Entonces, hay al menos dos elementos de $\mathcal{X}$ cuya diferencia es un múltiplo de 52.*

Para comprobarlo, distribuimos los números naturales en 52 “nidos”, según el resto módulo 52 que tengan:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 0 (\text{mód } 52)\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 1 (\text{mód } 52)\} \\ &\vdots \\ A_{52} &= \{n \in \mathbb{N} / n \equiv 51 (\text{mód } 52)\} \end{aligned}$$

Los 53 elementos de $\mathcal{X}$ serán las palomas. El principio del palomar nos dice que habrá dos elementos de $\mathcal{X}$ con el mismo resto módulo 52; y, por tanto, su diferencia será un múltiplo de 52.

Con más generalidad, si tenemos un conjunto con n objetos que distribuimos en k cajas,

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n > k & \Longrightarrow & \text{al menos hay una caja con 2 objetos.} \\ \text{Si } n > 2k & \Longrightarrow & \text{al menos hay una caja con 3 objetos.} \\ \vdots & & \\ \text{Si } n > rk & \Longrightarrow & \text{al menos hay una caja con } r+1 \text{ objetos.} \\ \vdots & & \end{array}$$

La Teoría de Ramsey se puede ver como una generalización (nada trivial, por supuesto) del principio del palomar.

Algunos ejemplos sencillos.

Consideremos ahora unos problemas que se resuelven de manera sencilla y que luego interpretaremos dentro de la Teoría de Ramsey.

• **Primer ejemplo.** *En cualquier reunión de 6 personas, o bien 3 de ellas se conocen entre sí, o bien 3 de ellas no se conocen entre sí.*
Estamos suponiendo que si una persona conoce a otra, entonces ésta también conoce a la primera y que, *¡mmm!*, “nadie se conoce a sí mismo”. Veremos cómo describir este problema en términos de coloraciones de las aristas de un grafo y observaremos que el resultado no es cierto si sólo hay cinco personas. Esto nos proporcionará el primer ejemplo no trivial de un número de Ramsey (que definiremos convenientemente más adelante):

$$R(3, 3) = 6 \,.$$

• **Segundo ejemplo.** *Dados 5 puntos en el plano (de forma que cada 3 de ellos no sean colineales), hay* ***cuatro*** *que forman un cuadrilátero convexo.*

Esta observación, debida a Esther Klein (luego Esther Szekeres), sirvió como punto de partida para los estudios de Erdős y Szekeres.

• **Tercer ejemplo.** *Dada una lista ordenada de 5 números reales distintos, al menos* ***tres*** *de ellos (en el mismo orden) forman una sucesión monótona, creciente o decreciente.*

El Teorema de Ramsey. Los números de Ramsey.

El primer problema que nos interesará resolver es el siguiente: dados unos enteros p y q, encontrar el mínimo entero $r = R(p, q)$ para el que cualquier coloración con dos colores (por ejemplo, azul y rojo) posible de las aristas del grafo K_r contenga un subgrafo[3] K_p cuyas aristas estén todas coloreadas de rojo o bien un subgrafo K_q con todas sus aristas azules.

Este número $R(p, q)$ es un número de Ramsey. En general, podemos considerar un número mayor de colores, $t \geq 2$, y plantearnos el problema de encontrar, dados unos enteros $p_1, \ldots, p_t$, el mínimo entero $R(p_1, \ldots, p_t)$ para el que cualquier coloración con esos t colores de las aristas del grafo completo con ese número de vértices contenga un subgrafo completo K_{p_1} del primer color o un subgrafo completo K_{p_2} del segundo, etc. Lo que Ramsey probó es que estos problemas tienen solución:

Teorema (Ramsey, primera versión). *Dados unos enteros $p_1, \ldots, p_t$, existe un entero N tal que si un conjunto tiene al menos ese número de elementos y coloreamos los subconjuntos de dos elementos de ese conjunto con t colores, entonces existe un i y un p_i-subconjunto tal que todos sus subconjuntos de dos elementos tienen color i.*

Llamaremos $R(p_1, \ldots, p_t)$ al mínimo entero N que cumpla las condiciones del enunciado anterior. En términos de coloraciones de grafos, dados los enteros $p_1 \ldots p_t$, podemos encontrar un grafo completo suficientemente grande (con suficiente número de vértices, al menos $R(p_1, \ldots, p_t)$) para el que cualquier coloración de sus aristas con t colores contenga un subgrafo K_{p_i} monocromático (de color i).

Una vez garantizada la existencia de los números de Ramsey, parece natural intentar calcularlos explícitamente o, al menos, obtener cotas para su tamaño. En ambos casos, los resultados obtenidos son muy escasos. Por ejemplo, para los números de Ramsey básicos, $R(p, q)$, es fácil convencerse de que se cumple que

(i) $R(p, q) = R(q, p)$,

(ii) $R(1, q) = 1$,

(iii) $R(2, q) = q$, si $q \geq 2$,

por lo que los números de Ramsey $R(p, q)$ no triviales son aquéllos para los que $p \geq 3$ y $q \geq 3$. La siguiente tabla recoge algunos de los valores conocidos hasta el momento. En los casos en los que no se conoce el valor exacto del número de Ramsey, la tabla incluye

[3] Un subgrafo $G' = (V', A')$ de $G = (V, A)$ tiene $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A \cap \mathcal{P}_2(V')$.

las cotas entre las que se sabe con seguridad que se encuentra (*e.g.*, $R(3,10)$ está entre 40 y 43):

$p \setminus q$	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	6	9	14	18	23	28	36	40-43	46-51
4		18	25	35-41	49-61	53-84	69-115	80-149	96-191
5			43-49	58-87	80-143	95-216	114-316	118-442	
6				102-165					

Para los problemas más generales se tienen todavía menos resultados. Algunos de ellos son que $R(3,3,3) = 17$ o que $51 \leq R(3,3,3,3) \leq 65$. Una buena revisión de los resultados en este sentido se puede encontrar en [Rd]. En cuanto a las cotas y los comportamientos asintóticos, tampoco los resultados son muy completos. Veremos algunos de ellos más adelante.

Se pueden estudiar situaciones todavía más generales. Por ejemplo, considerar hipergrafos en lugar de grafos; en este caso, las "aristas" ya no involucran pares de vértices, sino un número mayor, $r \geq 2$. Pero el teorema de Ramsey sigue siendo cierto, cambiando los subconjuntos de tamaño 2 por subconjuntos de tamaño r. La notación ahora sería $R(p_1,\dots,p_t;r)$; lo que llamábamos $R(p_1,\dots,p_t)$ debería ser escrito como $R(p_1,\dots,p_t;2)$. Enunciemos entonces el teorema de Ramsey, en una versión más general:

Teorema (Ramsey, versión general) *Dados unos enteros $p_1,\dots,p_t,r$, existe un entero $R(p_1,\dots,p_t;r)$ tal que si un conjunto tiene al menos ese número de elementos y coloreamos los subconjuntos de r elementos de ese conjunto con t colores, entonces existen un i y un p_i-subconjunto tal que todos sus subconjuntos de r elementos tienen color i.*

El principio del palomar, interpretado a la Ramsey.

Ya comentamos que el principio del palomar podía ser visto como el primer ejemplo de resultado de tipo Ramsey. Por ejemplo, se tiene que

$$R(m,n;1) = m+n-1\,.$$

Si tenemos un conjunto con $m+n-1$ elementos y los coloreamos con dos colores, rojo y azul, por ejemplo, entonces o bien al menos m llevan el color rojo o bien al menos n el azul (si no fuera así, tendríamos como mucho $m-1$ rojos y $n-1$ azules; y entre todos no tendríamos los $m+n-1$ totales). Pero esto no es sino una de las formas del principio del palomar: si tenemos $m+n-1$ objetos y los distribuimos en dos cajas, o bien una contiene al menos m o bien la otra al menos n.

La formulación habitual del principio del palomar se escribe, en términos de números de Ramsey, como

$$R(\underbrace{2,2,\dots,2}_{t};1) = t+1\,.$$

Es decir, $t+1$ es el mínimo entero que nos permite asegurar que si distribuimos ese número de objetos en t cajas, al menos una de ellas contiene dos o más objetos.

Los ejemplos, revisados a la luz del Teorema de Ramsey.

Resolvamos los problemas que propusimos anteriormente con argumentos de coloraciones de grafos, a la Ramsey.

• **Primer ejemplo.** Empecemos recordando el de la reunión de seis personas. En términos de grafos, lo que tenemos es un grafo completo K_6, cuyas aristas coloreamos con dos colores, azul y rojo; y queremos probar que sea cual sea esa coloración, siempre encontramos un K_3 rojo o un K_3 azul. La prueba es en este caso muy sencilla: nombremos el conjunto de vértices por $\{a, b, c, d, e, f\}$ y fijémonos en uno de ellos, por ejemplo a. Por el principio del palomar, al vértice a deben llegar al menos tres aristas rojas o bien al menos tres aristas azules (recordemos que a a llegan cinco aristas en total). Supongamos que estamos en el primer caso, y que las aristas rojas le unen con b, c y d, por ejemplo. Si alguna de las aristas entre estos tres vértices fuera roja, tendríamos ya un triángulo rojo. Y si no fuera así, lo que tendríamos sería uno azul con vértices b, c y d. El mismo argumento permite obtener la misma conclusión en el segundo caso, cuando a recibe al menos tres aristas azules (de hecho, hay al menos dos triángulos monocromáticos).

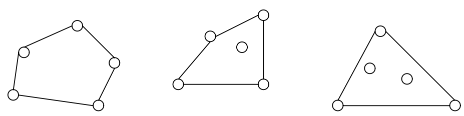
Es fácil darse cuenta de que no podemos concluir lo mismo si partimos de un K_5, por lo que obtenemos que

$$R(3, 3) = 6.$$

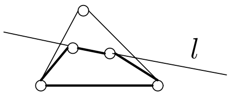
Podríamos interpretar este resultado en términos de juegos: imaginemos una partida entre dos jugadores, uno con un lápiz rojo y otro con uno azul. Se dibujan 6 vértices en el plano y cada jugador pinta, en cada turno, una arista entre dos de ellos. Gana el jugador que consiga dibujar un triángulo de su color. El resultado de Ramsey nos dice que este juego *no* puede terminar en tablas. Porque no pueden dibujarse todas las aristas posibles sin que aparezca un triángulo monocromático, bien rojo o bien azul.

Intentemos generalizar este problema: si partiéramos de n personas, la definición del número de Ramsey $R(p, q)$ nos permitiría deducir que si $n \geq R(p, q)$, entonces o bien hay p personas tales que cada dos de ellas se conocen entre sí o bien hay q tales que cada dos no se conocen entre sí. Por supuesto, determinar con precisión el valor de $R(p, q)$ para cada par (p, q) es un problema complicado (véanse en la tabla correspondiente los escasos valores exactos que se conocen)

• **Segundo ejemplo.** Volvamos a la observación de Esther Klein acerca de que dados 5 puntos en el plano (y ningún triple colineal), entonces cuatro de ellos forman un cuadrilátero convexo. Para probarlo, recordemos que un conjunto S del plano es convexo si, para cada par de puntos del conjunto, el segmento que los une está contenido en el conjunto. La envolvente convexa de un conjunto de puntos T se define entonces como la intersección de todos los convexos que contienen a T (en particular, la envolvente convexa es un convexo). En el caso de que tengamos 5 puntos en posición general (sin tríos colineales), la envolvente convexa es un polígono de 5, 4 o 3 lados:



En los dos primeros casos, el resultado es inmediato. Y en el tercero, la línea l que une los dos puntos interiores corta al triángulo en dos de sus lados. Los dos puntos interiores, junto con los dos vértices del triángulo que quedan al mismo lado de la línea l forman el cuadrilátero convexo pedido.



Pero podríamos plantearnos una pregunta más general, como hicieron Erdős y Szekeres [ES]: ¿podemos encontrar, para un n dado, un entero $N(n)$ tal que cualquier conjunto con al menos N puntos contenga n puntos formando un polígono convexo? La respuesta a esta cuestión está recogida en el siguiente teorema:

Teorema (Erdős y Szekeres). $N(n) \leq R(5, n; 4)$.

Demostración. Sea $R = R(5, n; 4)$ y consideremos un conjunto $\mathcal{S}$ de R puntos en el plano (sin triples colineales). Coloreamos los subconjuntos de cuatro elementos de $\mathcal{S}$ de la siguiente manera: si forman un cuadrilátero convexo, le asignamos el color "convexo", y si no, el color "no convexo". Por la definición del número de Ramsey $R(5, n; 4)$, o bien tenemos un conjunto de 5 puntos en $\mathcal{S}$ cuyos 4-subconjuntos son todos cuadriláteros no convexos o bien un conjunto de n puntos cuyos 4-subconjuntos forman cuadriláteros convexos. El primer caso no puede darse, como muestra el resultado de E. Klein. Y el segundo permite concluir la prueba del teorema, si demostramos que un polígono es convexo si sus cuadriláteros lo son. Para verlo, supongamos que no fuera así: si los n puntos no formaran un polígono convexo, uno de los puntos estaría en el interior de la envolvente convexa de los restantes. Pero entonces estaría también en la envolvente convexa de tres de ellos; no es difícil convencerse de este hecho[4]. Estos cuatro puntos formarían un cuadrilátero no convexo, algo contrario a la hipótesis. □

Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} n = 4 \quad & N(4) = 5 = 2^2 + 1, \\ n = 5 \quad & N(5) = 9 = 2^3 + 1. \end{aligned}$$

Erdős y Szekeres conjeturaron que $N(n) = 2^{n-2}+1$, pero el problema no ha sido dilucidado (ver [DCG] para los últimos avances en el problema).

• **Tercer ejemplo.** Volvamos al problema de las sucesiones: dados 5 números reales en un cierto orden, $\{x_1, \ldots, x_5\}$, hay tres de ellos que forman una sucesión monótona. Supongamos que $x_2 \geq x_1$ (un argumento similar valdría para el caso contrario). Si $x_3 \geq x_2$, habremos terminado. Si no fuera así, sería porque o bien $x_1 \leq x_3 \leq x_2$ o bien $x_3 \leq x_1$. En el primer caso, con el cuarto punto tendríamos ya una sucesión monótona. En el segundo, si x_4 estuviera por debajo de x_3 o por encima de x_2, habríamos acabado. Sólo quedaría la posibilidad de que $x_3 \leq x_4 \leq x_2$. Y el quinto punto determinaría la sucesión monótona de tres puntos.

[4] El resultado en dimensiones mayores (si $X \subset \mathbb{R}^n$, cada punto de la envolvente convexa de X está en la envolvente convexa de $n+1$ —o menos— puntos de X) es un teorema clásico debido a Carathéodory, [Ca]; ver, por ejemplo, [Be], página 27.

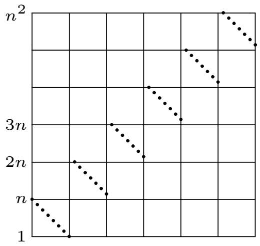
En realidad, podemos conseguir un resultado más general, como hacían Erdős y Szekeres:

Teorema (Erdős y Szekeres) *Si tenemos n^2+1 números reales, $n+1$ de ellos forman una sucesión monótona.*

Demostración. Consideremos n^2+1 números reales $\{x_i\}$. Para cada x_i, formamos la sucesión creciente más larga que comienza en x_i, y llamemos $1+r(x_i)$ a su longitud. Cada $r(x_i)$ es positivo, y si hay algún $r(x_i) \geq n$, habremos terminado. Supongamos por el contrario que cada $r(x_i) \in \{0, \ldots, n-1\}$. Como hay n^2+1 de estos $r(x_i)$, por el principio del palomar algún valor de $\{0, \ldots .n-1\}$ se debe tomar $n+1$ veces, digamos el valor k. Es decir, que existe una sucesión de $n+1$ números $x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}$ tales que para todos ellos, $r(x_{i_\nu}) = k$. Pero entonces la sucesión $\{x_{i_\nu}\}$ es decreciente: si algún término de la sucesión, digamos x_{i_t} fuera mayor que uno anterior, x_{i_s}, los k números de la sucesión creciente que empieza en x_{i_t} más el propio x_{i_t} constituirían una sucesión creciente de $k+1$ para x_{i_s}, algo imposible. $\square$

Y el resultado es el mejor posible, como podemos observar considerando la sucesión

$$\underbrace{n, n-1 \ldots, 1}, \underbrace{2n, \ldots, n+1}, \ldots, \underbrace{n^2, \ldots, (n-1)^2+1}$$



Pero podemos probar también "a la Ramsey" la existencia, para cada n, del número $M(n)$ para el que pudiéramos asegurar que, dada una sucesión de $M(n)$ números reales, podemos encontrar una subsucesión monótona de longitud n, comprobando que

$$M(n) \leq R(n, n, n, n; 3).$$

Démonos una sucesión de $R(n, n, n, n; 3)$ números reales y coloreemos todos las subconjuntos de 3 elementos con 4 colores, asignándoles a si forman una sucesión creciente, b si forman una sucesión decreciente y c y d en los otros dos casos posibles ($x_1 \leq x_2$ y $x_2 \geq x_3$ o bien $x_1 \geq x_2$ y $x_2 \leq x_3$). Por la definición del número $R(n, n, n, n; 3)$, deberemos tener una sucesión monocromática (en alguno de los cuatro colores) de n números. Si $n \geq 5$, podemos descartar los colores c y d, como el lector comprobará sin dificultad. Y si los colores son a o b, habremos acabado: una sucesión es creciente si todas sus subsucesiones de 3 elementos son crecientes (y lo mismo para las decrecientes).

Obsérvese que estos resultados son versiones finitas (en el caso del de Erdős y Szekeres, versiones cuantitativas) del teorema de Bolzano, que afirma que en toda sucesión infinita de números reales existe una subsucesión monótona infinita. De hecho, el teorema de Bolzano responde al contexto general de la teoría de Ramsey (ver la siguiente sección).

Ejemplos de aplicación del Teorema de Ramsey.

• Teorema de Schur. Recordemos ahora el teorema de Schur[5], [Sc], que afirma que

¡el Último Teorema de Fermat es falso!

pero (en letra pequeña) en $\mathbb{Z}_p$, las clases de congruencia módulo p, no en $\mathbb{Z}$. Enunciémoslo convenientemente:

Figura 4: I. Schur

Teorema (Schur) *Dado un entero m, podemos encontrar un entero $S(m)$ tal que, si p es un primo suficientemente grande, $p \geq S(m)$, entonces la ecuación*

$$x^m + y^m = z^m$$

tiene solución no trivial en $\mathbb{Z}_p$.

Empecemos comprobando el siguiente lema:

Lema *Dado un entero m, existe un entero $N(m)$ tal que si $N \geq N(m)$ y coloreamos el conjunto $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$ con m colores existirán tres números $x, y, z \in \mathcal{N}$ con el mismo color y tales que*

$$x + y = z.$$

Demostración. Comprobemos que basta con

$$N(m) = R(\underbrace{3, \dots, 3}_{m \text{ veces}}; 2) - 1\,.$$

Dada la coloración de $\mathcal{N}$ con m colores, consideremos un grafo completo K_{N+1} (con vértices $\{0, \dots, N\}$). Para cualquier arista $\{i, j\}$ del grafo, el valor de $|i - j|$ está en el conjunto $\mathcal{N}$. Así que la coloración de $\mathcal{N}$ nos permite colorear las aristas de K_{N+1} con la siguiente receta:

$$\text{Color de } \{i, j\} = \text{ Color de } |i - j| \text{ en la coloración de } \mathcal{N}.$$

Para esta coloración de las aristas de K_{N+1}, como $N \geq R(3, \dots, 3; 2) - 1$, existirá un triángulo monocromático. Es decir, tendremos vértices $i > j > k$ tales que

$$\text{Color de } \{i, j\} \;=\; \text{Color de } \{j, k\} \;=\; \text{Color de } \{i, k\}\ .$$

Traduciéndolo a la coloración original, encontramos tres elementos

$$i - j, \quad j - k, \quad i - k,$$

que llevan el mismo color. Llamando $x = i - j$, $y = j - k$ y $z = i - k$, obtenemos el resultado deseado. □

[5] Este teorema es una consecuencia directa de las cotas conocidas para las sumas de Jacobi o las de Gauss (ver [IR], páginas 97-98).

Utilicemos este lema para probar el teorema de Schur. Queríamos probar que la ecuación

$$x^m + y^m = z^m$$

tiene solución no trivial en $\mathbb{Z}_p$, con p un primo grande, $p \geq S(m) = R(3, \ldots, 3; 2)$. Consideremos el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^* = \{1, \ldots, p-1\}$ y sus subconjuntos

$$H_j = \{j\, a^m : a = 1, 2, \ldots, p-1\} \subset \mathbb{Z}_p^*\,,$$

donde $1 \leq j \leq p-1$. Una primera observación es que estos conjuntos, o son iguales, o son disjuntos. Porque si dos de ellos, digamos H_j y H_k, con $j \neq k$, tuvieran un elemento en común, entonces

$$j\, c^m = k\, d^m\,,$$

para ciertos $c, d \in \mathbb{Z}_p^*$. Es decir, que $j = k d^m c^{-m}$. Así que

$$H_j = \{j a^m : a = 1, \ldots, p-1\} = \{k(a\, d\, c^{-1})^m : a = 1, \ldots, p-1\} = H_k\,.$$

Además, su unión nos da todo el conjunto $\mathbb{Z}_p^*$. Descartemos entonces todos aquéllos que sean iguales: ¿cuántos nos quedan? Estimemos cuántos elementos tienen esos conjuntos (en principio cada uno tiene $p-1$ elementos, pero los habrá repetidos). Si dos elementos de H_j son iguales es porque, para ciertos, $a, b \in \{1, \ldots, p-1\}$,

$$j a^m = j b^m \Longrightarrow a^m = b^m\,.$$

Es decir, lo que queremos es contar cuántas potencias iguales pueden aparecer. Fijemos un elemento b: ¿cuántos elementos a hay tales que $a^m = b^m$? Si ocurre eso, entonces ab^{-1} es raíz de $x^m - 1 = 0$. Y esta ecuación tiene, a lo más, m raíces en $\mathbb{Z}_p^*$. Así que potencias repetidas hay, como mucho, m. Por tanto,

$$|H_j| \geq \frac{p-1}{m}\,.$$

Como se tiene que

$$\left| \bigcup_{j=1}^{p-1} H_j \right| = \left|\mathbb{Z}_p^*\right| = p - 1\,,$$

tenemos que nos podemos quedar con a lo más m de los H_j que sean disjuntos y cuya unión sea todo $\mathbb{Z}_p^*$.

Podemos ahora utilizar estos conjuntos como “colores”: coloreamos el conjunto $\{1, \ldots, p-1\}$ dependiendo del H_j al que pertenezcan. El primo p es lo suficientemente grande como para que el lema anterior nos garantice que existen $x, y, z \in H_j$, para cierto j, tales que $x + y = z$. Esto es, $ja^m + jb^m = jc^m$ y, por tanto,

$$a^m + b^m = c^m\,,$$

que es lo que queríamos demostrar[6]. □

[6]Agradecemos a Fernando Chamizo que nos haya sugerido esta demostración, que simplifica la original.

• Teorema de van der Waerden. Otro resultado notable con todo el sabor de un teorema "a la Ramsey" es el siguiente teorema sobre progresiones aritméticas [Wa]:

Teorema (van der Waerden) *Para todo par de enteros l y r, existe un n_0 tal que si $n \geq n_0$ y coloreamos el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ con r colores, entonces el conjunto contiene una progresión aritmética monocromática de longitud l,*

$$a, a+d, \ldots, a+(l-1)d$$

Una prueba de este resultado puede encontrarse en [GRS], página 29.

• Otra aplicación. Un *semigrupo finito* es un conjunto finito en el que se define una operación binaria asociativa, que llamaremos *producto.* Un elemento e se dice que es *idempotente* si se cumple que $e \cdot e = e$. Pues bien,

> *todo semigrupo finito debe tener un elemento idempotente.*

Para probarlo con la Teoría de Ramsey, tomemos un elemento cualquiera, a, del semigrupo. Llamemos n al número de elementos del conjunto (el *orden* del semigrupo) y consideremos

$$N = R(\underbrace{3, 3, 3 \ldots, 3}_{n}; 2)\,.$$

Llamemos a^t al producto (t veces) del elemento a. Tomemos ahora el grafo completo K_n con sus vértices numerados, y coloreemos sus aristas con n colores (cada color es un elemento del semigrupo) con la siguiente receta: la arista que une los vértices i y j ($i < j$) se colorea con a^{j-i} (el hecho de que sea un semigrupo nos garantiza que cualquier potencia de un elemento pertenece al semigrupo). El Teorema de Ramsey nos dice que debe haber un triángulo monocromático, esto es, deben existir i, j, k ($i < j < k$) tales que

$$a^{j-i} = a^{k-i} = a^{k-j}\,.$$

Si llamamos $e = a^{j-i}$, teniendo en cuenta que $a^{k-j} \cdot a^{j-i} = a^{k-i}$, observamos que se cumple que $e \cdot e = e$. Así que éste es el elemento idempotente que buscábamos.

• Un ejercicio, para terminar. Dada una matriz A cuadrada de roden n (n filas y n columnas), una submatriz de orden m ($m < n$) se dice que es *principal* si se obtiene a partir de A borrando $n - m$ filas y las mismas $n - m$ columnas (p.e., si borramos la primera fila deberemos borrar también la primera columna). Inténtese probar, a la Ramsey, el siguiente teorema:

Teorema. *Sea m un entero positivo arbitrario. Cualquier matriz cuadrada A cuyos elementos sean ceros o unos y que tenga un orden n suficientemente grande contiene una* *submatriz principal de orden m de uno de los siguientes cuatro tipos:*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix}$$

(donde en lugar de asteriscos se permiten ceros y unos sin ninguna restricción).

Cotas para los números de Ramsey

Ya el propio Ramsey había observado que

$$R(k,k) \leq 2^{\frac{k\,(k-1)}{2}},$$

que luego mejoró obteniendo que $R(k,k) \leq k!$; aunque él mismo aventuraba que la cota podía reducirse. Para obtener **cotas superiores**, empecemos probando la siguiente relación:

Teorema. *Para cualesquiera enteros $p, q \geq 2$,*

$$R(p,q) \leq R(p,q-1) + R(p-1,q).$$

Demostración. Llamemos $r = R(p,q-1) + R(p-1,q)$ y coloreemos las aristas de un grafo completo K_r con dos colores. Querríamos probar que existe un K_p rojo o un K_q azul. Para ello, fijemos un vértice $v \in K_r$ y consideremos sus $r-1$ aristas. Habrá un cierto número de ellas rojas y otras cuantas azules. Como

$$r - 1 = R(p,q-1) + R(p-1,q) - 1,$$

el principio del palomar nos dice que habrá al menos $R(p-1,q)$ aristas rojas o bien al menos $R(p,q-1)$ aristas azules. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el número de aristas rojas es $\geq R(p-1,q)$. Fijémonos en los vértices conectados a v mediante estas aristas y consideremos el grafo completo formado por $R(p-1,q)$ de ellos. Por la definición del número de Ramsey, tendremos o bien un K_{p-1} rojo o bien un K_q azul. En el segundo caso ya habríamos terminado, y para el primero basta observar que si añadimos las aristas que conectan los $p-1$ vértices con v (todas rojas) tendremos un K_p monocromático rojo. $\square$

A partir de esta expresión podemos obtener una cota explícita para los números de Ramsey $R(p,q)$:

Teorema. *Para todo par de enteros $p, q \geq 1$,*

$$R(p,q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

Demostración. Lo probaremos por inducción. Podemos comprobar los primeros casos directamente:

$$\begin{array}{rl} R(1,q) = R(p,1) = 1 & \binom{q-1}{0} = \binom{p-1}{0} = 1, \\ R(2,q) = q \text{ y } R(p,2) = p & \binom{q}{1} = q \text{ y } \binom{p}{1} = p, \\ R(3,3) = 6 & \binom{4}{2} = 6. \end{array}$$

Llamemos n a la suma de los dos parámetros del número de Ramsey y supongámoslo probado para $n-1$. Para $n = p+q$, utilizando el teorema anterior y la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} R(p,q) &\leq R(p-1,q) + R(p,q-1) \\ &\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1}. \end{aligned}$$

Para terminar, sólo queda recordar la propiedad de los coeficientes binómicos

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}. \qquad \square$$

Un resultado más general es:

Teorema. *Para todo $n_1, n_2, \ldots, n_t \geq r \geq 1$, el número $R(n_1, \ldots, n_t; r)$ existe y satisface que*

$$R(n_1, \ldots, n_t; r) \leq R(R(n_1, \ldots, n_{t-1}; r), n_t; r)\,.$$

Que se prueba apoyándose en el primer teorema y utilizando inducción. Por supuesto, una cota superior para los números de Ramsey implica su existencia; así que ésta es una forma de probar el teorema de Ramsey en su versión general.

Para obtener **cotas inferiores** es necesario probar la existencia de ciertas estructuras finitas con ciertas propiedades; utilizaremos, siguiendo a Erdős [Er], argumentos no constructivos, de tipo probabilístico. Lo haremos para el número de Ramsey $R(k,k)$, que a partir de ahora llamaremos R_k.

Consideremos un grafo completo K_n y coloreemos *aleatoriamente* cada una de sus aristas con dos colores. Es decir, consideremos un espacio de probabilidad cuyos elementos son las coloraciones de las aristas de K_n con dos colores y cuyas probabilidades vienen dadas por

$$\begin{aligned} P(\text{colorear } \{i,j\} \text{ de rojo}) &= \frac{1}{2}, \\ P(\text{colorear } \{i,j\} \text{ de azul}) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

para cada arista $\{i,j\}$ del grafo (y el coloreado de cada arista es independiente del de los demás). Habrá entonces $2^{\binom{n}{2}}$ posibles coloraciones, y la probabilidad de obtener una particular será $2^{-\binom{n}{2}}$.

Consideremos un conjunto S de k vértices del grafo y llamemos E_S al suceso "S es monocromático"; es decir, las aristas que unen vértices de S son todas del mismo color. Para calcular la probabilidad del suceso E_S, observemos que tendremos una coloración de K_n en la que S sea monocromático (por ejemplo, rojo), con probabilidad

$$\frac{2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}}{2^{\binom{n}{2}}} = 2^{-\binom{k}{2}},$$

porque para contar las coloraciones que nos interesan bastará decidir el color de las $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ aristas que no están en S. Así que

$$\begin{aligned} P(E_S) &= P(\ S \text{ monocromático rojo }) + P(\ S \text{ monocromático azul }) \\ &= 2^{-\binom{k}{2}} + 2^{-\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

Llamemos ahora E_k al suceso "algún K_k es monocromático"; su probabilidad será

$$\begin{aligned} P(E_k) &\leq \sum_{\substack{S \subset V(K_n) \\ S \text{ con } k \text{ vértices}}} P(E_S) = \#\{S \subset V(K_n)/S \text{ con } k \text{ vértices}\} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \\ &= \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}. \end{aligned}$$

Si n es tal que esta probabilidad es un número menor que uno, tendremos alguna coloración en la que no haya K_k monocromático alguno. Y en esas condiciones, necesariamente el número de Ramsey R_k debe ser mayor que n. Es decir, que tenemos que

$$\binom{R_k}{k} \geq 2^{\binom{k}{2}-1}.$$

Utilizando la estimación

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \leq \frac{m^n}{n!} \leq \frac{m^n}{n^{n/2}},$$

podemos reescribir la cota para R_k (si $k \geq 4$):

$$R_k^k \geq k^{k/2} 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1} \geq 2^{k^2/2}\, 2^{k/2-1} \geq 2^{k^2/2}.$$

Es decir, que

$$R_k \geq 2^{k/2}.$$

De donde

$$\liminf_{k\to\infty} (R_k)^{1/k} \geq \sqrt{2}.$$

Podemos ahora recordar la cota superior que obteníamos anteriormente en el caso particular de que $p = q = k$:

$$R_k \leq \binom{2(k-1)}{k-1} \leq 4^{k-1},$$

donde la última desigualdad se basa en la estimación

$$\binom{2n}{n} \leq 2^{2n} \qquad \left(\text{en realidad } \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}\right)$$

(el resultado de Stirling no mejora mucho la cota). Reuniendo ambas estimaciones, tenemos que

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{k\to\infty} (R_k)^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} (R_k)^{1/k} \leq 4.$$

¡Decidir si existe el $\lim_{k\to\infty} {R_k}^{1/k}$ es uno de los grandes problemas que permanecen sin resolver es este campo!

Versiones infinitas del Teorema de Ramsey

Y empecemos, una vez más, con el principio el palomar, esta vez en su versión infinita: una formulación obvia, pero que se utiliza constantemente.

> *Si tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ infinito y distribuimos sus elementos en un número finito de cajas, entonces hay una caja que contiene infinitos elementos.*

En su trabajo original, Ramsey, de hecho, probó primero la versión de su teorema para conjuntos infinitos.

Teorema (Ramsey infinito) *Dado un conjunto $\mathcal{A}$ infinito numerable, si coloreamos sus k-subconjuntos con r colores, entonces existe un subconjunto infinito $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ cuyos k-subconjuntos son todos monocromáticos.*

En el lenguaje de grafos (para el caso $k = 2$), el teorema reza que si K es un grafo completo con un conjunto infinito numerable de vértices, entonces para cualquier coloración de sus aristas con dos colores existe un subgrafo completo (con un número infinito de vértices) monocromático. Es interesante señalar que el resultado no es cierto si el conjunto de los vértices es no numerable. Por ejemplo, si el grafo completo tiene como vértices los números reales y coloreamos sus aristas con dos colores, entonces no tiene por qué existir necesariamente un subgrafo completo monocromático cuyos vértices sean un subconjunto no numerable de los reales.

Corolario (teorema de Bolzano) *Toda sucesión infinita de números reales contiene una subsucesión infinita que es creciente o decreciente.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ la sucesión infinita de números reales. Coloreemos sus 3-subconjuntos con 4 colores dependiendo de la disposición de los tres números:

Color a *Color b* *Color c* *Color d*

El Teorema de Ramsey nos garantiza que existe un subconjunto de $\mathcal{A}$ infinito monocolor. Es fácil comprobar que sólo puede ser de los colores a o d, es decir, corresponder a una sucesión creciente o decreciente. □

Corolario *Si $\mathcal{S}$ es un conjunto infinito en $\mathbb{R}^2$, entonces existe un $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ infinito tal que, o bien $\mathcal{A}$ está contenido en una recta, o bien cada 3 puntos de $\mathcal{A}$ son no colineales.*

La prueba es similar a la anterior. Un importante resultado sobre existencia de progresiones aritméticas arbitrariamente largas es el siguiente:

Teorema (Szemerédi). *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de enteros positivos con densidad superior positiva, esto es, tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{A} \cap \{1, \ldots, n\}|}{n} > 0,$$

entonces $\mathcal{A}$ contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Este resultado contestó afirmativamente a una conjetura planteada por Erdős y Turán en 1936. Roth probó en 1952, con técnicas de la Teoría Analítica de Números, que $\mathcal{A}$ debía contener una progresión aritmética de tres términos; en 1969, Szemerédi probó que en realidad debían ser 4. Y finalmente, en 1975, el propio Szemerédi, [Sz], probó la conjetura completa, con técnicas combinatorias. En 1977, Furstenberg, [Fu], presentó una prueba alternativa, en la que utilizaba herramientas de la Teoría Ergódica. Gowers, galardonado con la medalla Fields[7] en 1998 ha propuesto recientemente, ver [Go], una nueva prueba del resultado sobre progresiones de longitud cuatro, con técnicas del Análisis de Fourier (cercanas a las de Roth) y que parecen permitir la prueba del resultado general.

El teorema de Ramsey nos proporciona los primeros ejemplos explícitos de las llamadas **sentencias de Gödel**: enunciados que no pueden ser probados con los axiomas de la aritmética tradicional. Por ejemplo, consideremos el siguiente resultado (que es una variación sobre el Teorema de Ramsey finito):

Teorema. *Diremos que un conjunto $\mathcal{X}$ de enteros positivos es* **grande** *si $\#\mathcal{X} > \min \mathcal{X}$. Para cualesquiera enteros n, k, r, existe un entero m tal que si coloreamos los k-subconjuntos de $[n, m]$, entonces existe un subconjunto* **grande** *monocromático (sus k-subconjuntos llevan el mismo color).*

Partiendo de la versión infinita del teorema de Ramsey (que no es expresable en la aritmética de Peano, por supuesto), no es difícil probar este resultado.

La versión finita del Teorema de Ramsey es un enunciado expresable y demostrable con los axiomas de la aritmética de Peano. Sin embargo, como probaron Paris y Harring-

[7]Veáse el artículo sobre los galardonados en La Gaceta, volumen 1, número 3.

ton, ([PH]), este otro enunciado sobre números enteros, expresable en la aritmética de Peano, **no** es demostrable en esa aritmética.

Coda

Terminemos recordando de nuevo la figura de Frank Plumpton Ramsey, quizás uno de los más brillantes (y, pese a ello, desconocido) pensadores de este siglo: original, pionero, precursor. Pese a que su profesión eran las Matemáticas, su devoción estaba en la Filosofía. De hecho, formuló el teorema que le ha dado fama en Matemáticas en el curso de su investigación sobre un problema lógico-filosófico; un problema sin solución, como probó Gödel después, [Gö]. Siguiendo a Sahlin, [Sa], podemos afirmar que

. . . tratando de resolver lo irresoluble, Ramsey probó lo indemostrable.

De conocer los resultados de Gödel, ¿habría Ramsey descubierto las implicaciones combinatorias que su teorema ha demostrado tener? Su prematura muerte nos privó de comprobarlo. Pero además Ramsey era un hombre apasionado, socialmente inquieto, amante de la vida. Quizá el siguiente discurso, pronunciado ante los "Apóstoles", el selecto grupo de discusión de Cambridge, nos ayude a conocer esta otra faceta suya.

> . . . Mi cuadro del mundo está dibujado en perspectiva, y no como un modelo a escala. El primer plano lo ocupan los seres humanos, y las estrellas son, para mí, tan pequeñas como monedas de tres peniques. No creo realmente en la astronomía, excepto como una complicada descripción de parte del curso de las sensaciones humanas y, posiblemente, animales.
>
> Aplico mi perspectiva no sólo al espacio, sino también al tiempo. A la larga, el mundo se enfriará y todo morirá; pero queda mucho para eso, y su valor actual, a interés compuesto, es casi nada. Que el futuro sea vacío no resta valor al presente.
>
> La Humanidad, que ocupa el primer plano de mi lienzo, es para mí interesante y toda ella admirable. Encuentro, al menos hasta ahora, que el mundo es un lugar placentero y excitante. Puede que vosotros lo encontréis deprimente; lo siento por vosotros, y vosotros, seguramente, desdeñaréis lo que digo. Pero yo tengo razón y vosotros no; sólo tendríais alguna razón para rechazar lo que digo si vuestros sentimientos se correspondieran con la realidad como los míos lo hacen. Pero no pueden. La realidad no es buena ni mala; simplemente es lo que a mi entusiasma y a vosotros deprime. Y lo siento por vosotros, porque es más agradable estar entusiasmado que deprimido. . . y no sólo más agradable, sino mejor para la vida de cada uno.
>
> *Frank P. Ramsey.*

Agradecimientos.

Los autores quieren agradecer a sus colegas Fernando Chamizo y Javier Cilleruelo sus lecturas críticas de una versión preliminar de este texto. Sus acertados comentarios han mejorado la claridad de la exposición.

Bibliografía

• La bibliografía de Frank P. Ramsey.

[Ra1] Ramsey, F.P.: "Mr Keynes on Probability" *The Cambridge Magazine* **11**, (1922). Reimpreso en *The British J. Phil. of Science*, **40** (1989).

[Ra2] Ramsey, F.P.: "The Foundations of Mathematics" *Proc. London Math. Soc.*, ser.2 **25**, par.1 (1925). Reimpreso en [Br1], [Me] y [Br2].

[Ra3] Ramsey, F.P.: "A Contribution to the Theory of Taxation", *The Economic Journal*, **37**, no. 145 (1927), pp. 47–61. Reimpreso en [Me].

[Ra4] Ramsey, F.P.: "A Mathematical Theory of Saving", *The Economic Journal*, **38**, no. 192 (1928), pp. 543–549. Reimpreso en [Me].

[Ra5] Ramsey, F.P.: "On a Problem of Formal Logic", *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2 **30** (1928). Reimpreso en [Br1], [Me].

[Ra6] Ramsey, F.P.: "Truth and Probability", publicado póstumamente en [Br1], [Me] y [Br2].

• Reimpresiones de las obras de Ramsey.

[Br1] Braithwaite R.B.: (ed) "The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays", *Routledge & Kegan Paul*, Londres, 1931.

[Me] Mellor, D.H.: (ed) "Essays in Philosophy, Logic, Mathematics and Economics", *Routledge & Kegan Paul*, Londres, 1978.

[Br2] Braithwaite R.B.: (ed) "Philosophical Papers", *Cambridge University Press*, Cambridge, 1990.

• La mejor referencia sobre la Teoría de Ramsey quizás sea

[GRS] Graham, R.L., Rothschild, B.L., Spencer, J.H.: "Ramsey Theory" *John Wiley & Sons*, 1990.

• Otras referencias de interés son:

[GS1] Graham, R.L., Spencer, J.H.: "Ramsey Theory", *Scientific American*, Julio 1990.

[JGT] Número especial de Journal of Graph Theory, **7** (1983).

[Sa] Sahlin N.E.: "The Philosophy of F.P. Ramsey", Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[Wi] Winn, J.A.: "Asymptotic bounds for classical Ramsey numbers", *Polygonal Publishing House*, Washington, 1988.

• Otros artículos y libros citados:

[AH] Appel, K., Haken, W.: "Every planar graph is four colorable. Part I. Discharging" *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429–490.

[AHK] Appel, K., Haken, W., Koch, J.: "Every planar graph is four colorable. Part II. Reducibility", *Illinois J. Math.* **21** (1977), 491–567.

[Be] Berger, M.: "Géométrie, Vol. 3: convexes et polytopes, polyédres réguliers, aires et volumes". *CEDI/NATHAN*, París (1979).

[Ca] Carathéodory, C.: "Über den Variabilitätsbereich der Koefficienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen", *Math. Ann.* **64** (1907), 95–115.

[DCG] Número especial de *Discrete Comput. Geom.* **19** (1998), no. 3.

[Er] Erdős, P.: "Some remarks on the theory of graphs" *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 292–294.

[ES] Erdős, P., Szekeres, G.: "On a Combinatorial Problem in Geometry", *Compositio Math.* **2** (1935), 463–470.

[Fu] Furstenberg, H.: "Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions", *J. Analyse Math.* **31** (1977), 204-256.

[Gö] Gödel, K.: "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematic und Physik* **38** (1931), 173-198 .

[Go] Gowers, W.T.: "A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four", *Geom. Funct. Anal.* **8** (1998), no. 3, 529-551.

[IR] Ireland, K., Rosen, M.: "A Classical introduction to modern Number Theory", *Springer-Verlag*, New York (1990).

[Ke] Keynes, J.M.: "A Treatise on Probability", *McMillan*, Londres (1921).

[PH] Paris, J., Harrington, L.: "A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic", Incluido en *Handbook of Mathematical Logic*, ed. J. Barwise, New York, 1978.

[Rd] Radziszowski, S.P.: "Small Ramsey Numbers", *The Electronic Journal of Combinatorics I* (1994), DS1.

[RSST] Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P., Thomas, R.: "The four-colour theorem" *J. Combin. Theory*, ser. B **70** (1997), no. 1, 2–44.

[Sc] Schur, I.: "Über die Kongruenz $x^n + y^n \equiv z^n (\mathrm{mod}\ p)$", *J. ber Deutsch. Math. Verein.* **25** (1916), 114–116.

[Sz] Szemerédi, E.: "On sets of Integers Containing no k Elements in Arithmetic Progression", *Acta Arith.* **27** (1975), 199–245.

[Wa] van der Waerden, B.L.: "Beweis einer Baudetschen Vermutung", *Nieury Arch. Wisk.* **15** (1927), 212–216.

[WR] Whitehead, A.N., Russell, B.: "Principia Mathematica", *Cambridge Univ. Press*, Cambridge (1913).

[Wi] Wittgenstein, L.: "Tractatus Logico-Philosophicus", *Routledge & Kegan Paul*, Londres (1922).

Pablo Fernández Gallardo
Departamento de Matemática Aplicada.
Facultad de Informática.
Universidad Politécnica de Madrid.
28860 BOADILLA DEL MONTE (MADRID).
e-mail: pfernandez@fi.upm.es

José Luis Fernández Pérez.
Departamento de Matemáticas.
Universidad Autónoma de Madrid.
28049 MADRID.
e-mail: joseluis.fernandez@uam.es